Ejercitate
en
Probabilidad III

Lucía A. Ruiz Galindo

2009

Ejercicio 1. Sea $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad x \in \{-1,0,1\}, \quad y \in \{1,2\}$. ¿$f(x,y)$ es de densidad?

Solución.
No, ya que para que la función sea de densidad se necesita que $f(x,y) \geq 0 \ \forall x \in R_X, \ y \in R_Y$. En este caso existen valores de X y Y tales que $f(x,y)$ es negativa. Por ejemplo, si $X = -1$ y $Y = 2$,

$$\begin{aligned} f(-1,2) &= (-1)^2 - (2)^2 \\ &= f(1,2) \\ &= -3 < 0. \end{aligned}$$

De igual forma, si $X = 1$ y $Y = 2$,

$$\begin{aligned} f(1,2) &= f(-1,2) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Considere la siguiente función conjunta

$$f(x,y) = k(x + y - 3xy^2), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Determine el valor de k para que $f(x,y)$ sea de densidad.

Solución.
La primera propiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad no se cumple, debido a que cuando X y Y toman ciertos valores, por ejemplo cercanos a uno, $f(x,y) \leq 0$.

Como $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, se deduce que $0 < x+y < 2$, además $0 < y^2 < 1$, de esta forma $0 < xy^2 < 1$, por lo que $0 < 3xy^2 < 3$, entonces $x + y - 3xy^2 < 0$.

Por ejemplo si se considera que $x = 0.99$ y $y = 0.99$, se obtiene $x+y = 1.98$, adémas $y^2 = 0.98$, entonces $xy^2 = 0.97$ y $3xy^2 = 2.91$, por lo tanto, $x + y - 3xy^2 = -0.93$.

Para que la función sea de densidad se necesitaría que $k \leq 0$, sin embargo al realizar el cálculo se obtiene que $k = 2$.

Se concluye que $f(x,y)$ no es de densidad.

Ejercicio 3. Sea $f(x,y) = \frac{1}{8}(6 - x - y), \ x \in (0,2), \ y \in (2,4)$, una función de densidad.

a) Calcule las funciones de densidad marginal.
b) Determine la función de distribución de X.

Solución.

a) La marginal de X es

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\
&= \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy \\
&= \frac{1}{8}\left[(6-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_2^4 \\
&= \frac{1}{8}\left\{\left[(6-x)4 - \frac{16}{2}\right] - \left[(6-x)2 - \frac{4}{2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{8}\big(24 - 4x - 8 - 12 + 2x + 2\big) \\
&= \frac{1}{8}(6-2x) \\
&= \frac{1}{4}(3-x).
\end{aligned}$$

y la de Y

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dx \\
&= \frac{1}{8}\left[(6-y)x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^2 \\
&= \frac{1}{8}\left\{\left((6-y)2 - \frac{4}{2}\right) - \left[(6-x)0 - \frac{0}{2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{8}\big(12 - 2y - 2\big) \\
&= \frac{1}{8}(10-2y) \\
&= \frac{1}{4}(5-y).
\end{aligned}$$

b) Si $x < 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}u \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $0 \leq x < 2$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(u)\mathrm{d}u + \int_{0}^{x} f(u)du \\
&= F(0) + \int_{0}^{x} \frac{1}{4}(3-u)du \\
&= 0 + \frac{1}{4}(3u - \frac{1}{2}u^2)\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{4}(3x - \frac{1}{2}x^2).
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{2} f(u)\mathrm{d}u + \int_{2}^{x} f(u)du \\
&= F(2) + \int_{2}^{x} 0du \\
&= \frac{1}{4}[3(2) - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De esta forma, la distribución de X es

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x0 \\ \frac{1}{4}(3x - \frac{1}{2}x^2), & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 4. Considére

i.

$y \backslash x$	0	1
-1	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

ii. $f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta(x+y)}, \ x \in (0,\infty), \ y \in (0,\infty)$.

a) Determine las funciones de densidad marginal.
b) Calcule la esperanza y varianza de ambas variables y la covarianza entre ellas.

Solución.
i.a) La marginal de X es

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= \sum_{y\in\{-1,1\}} f(x,y) \\ &= f(x,-1)+f(x,1). \end{aligned}$$

De manera que si $x=0$,

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f(0,-1)+f(0,1) \\ &= \frac{2}{8}+\frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

y si $x=1$,

$$\begin{aligned} f_X(1) &= f(1,-1)+f(1,1) \\ &= \frac{3}{8}+\frac{2}{8} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Por otra parte, la marginal de Y es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\ &= \sum_{x=0}^{1} f(x,y) \\ &= f(0,y)+f(1,y). \end{aligned}$$

Ahora, si $y=-1$,

$$\begin{aligned} f_Y(-1) &= f(0,-1)+f(1,-1) \\ &= \frac{2}{8}+\frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

y si $y = 1$,

$$\begin{aligned} f_Y(1) &= f(0,1) + f(1,1) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Agregando estas funciones marginales al cuadro de probabilidades, se tiene

$y\backslash x$	0	1	$f_Y(y)$
-1	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
$f_X(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

i.b) Las esperanzas de X y Y son, de manera respectiva,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x f_X(x) \\ &= 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y\in\{-1,1\}} y f_Y(y) \\ &= -1\left(\frac{5}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Una forma de obtener la varianza de X es calcular

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{R_X} x^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x^2 f_X(x) \\ &= 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

por consiguiente

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{5}{8} - (\frac{5}{8})^2 = \frac{15}{64}.$$

Analogamente para Y

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{R_Y} y^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=-1}^{1} y^2 f_Y(y) \\ &= 1\left(\frac{5}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

por consiguiente

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}.$$

El cálculo de la covarianza requiere además, determinar $E(XY)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y\in\{-1,1\}} \sum_{x=0}^{1} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y\in\{-1,1\}} [0yf(0,y) + 1yf(1,y)] \\ &= 0(-1)\frac{2}{8} + 0(1)\frac{1}{8} + 1(-1)\frac{3}{8} + 1(1)\frac{2}{8} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{5}{32} \\
&= \frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

o bien, utilizando la definición,

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= E\left[\left(X - \frac{5}{8}\right)\left(Y + \frac{1}{4}\right)\right] \\
&= \sum_{R_X}\sum_{R_Y}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)f(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{1}\sum_{y\in\{-1,1\}}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)f(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{1}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left[\left(-1 + \frac{1}{4}\right)f(x,-1) + \left(1 + \frac{1}{4}\right)f(x,1)\right] \\
&= \sum_{x=0}^{1}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left(-\frac{3}{4}f(x,-1) + \frac{5}{4}f(x,1)\right) \\
&= \left(0 - \frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{4}f(0,1) - \frac{3}{4}f(0,-1)\right) \\
&\quad + \left(1 - \frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{4}f(1,1) - \frac{3}{4}f(1,-1)\right) \\
&= -\frac{5}{8}\left[\frac{5}{4}\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \frac{3}{8}\left[\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}\right)\right] \\
&= \frac{1}{32}.
\end{aligned}
$$

ii.a) La función de densidad marginal de X es

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\ &= \int_0^{\infty} \theta^2 e^{-\theta(x+y)}dy \\ &= -\theta e^{-\theta(x+y)}\Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{y\to\infty}(-\theta e^{-\theta(x+y)}) - (-\theta e^{-\theta x}) \\ &= \theta e^{-\theta x},\ x \in (0,\infty) \end{aligned}$$

y la de Y es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\ &= \int_0^{\infty} \theta^2 e^{-\theta(x+y)}dx \\ &= -\theta e^{-\theta(x+y)}\Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty}(-\theta e^{-\theta(x+y)}) - (-\theta e^{-\theta y}) \\ &= \theta e^{-\theta y},\ y \in (0,\infty). \end{aligned}$$

ii.b) La esperanza y varianza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R_X} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x\theta e^{-\theta x}dx \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-\theta x} \\ du = dx & v = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= -\theta\frac{x}{\theta}e^{-\theta x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} \theta e^{-\theta x}dx \\ &= \lim_{x\to\infty} -xe^{-\theta x} + 0 - \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{R_X} x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2\theta e^{-\theta x}dx \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^{-\theta x} \\ du = 2x & v = -\dfrac{1}{\theta}e^{-\theta x}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= -\theta\frac{x^2}{\theta}e^{-\theta x}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\theta}\int_0^\infty x\theta e^{-\theta x}dx \\ &= \lim_{x\to\infty} -x^2e^{-\theta x} + 0 + \frac{2}{\theta}E(X) \\ &= \frac{2}{\theta^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Utilizando la definición de varianza:

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{R_X}[x - E(X)]^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\theta}\right)^2 \theta e^{-\theta x}dx \\ &= \int_0^\infty \left(x^2 - \frac{2}{\theta}x + \frac{1}{\theta^2}\right)\theta e^{-\theta x}dx \\ &= \int_0^\infty x^2\theta e^{-\theta x}dx - \frac{2}{\theta}\int_0^\infty x\theta e^{-\theta x}dx + \int_0^\infty \frac{1}{\theta}e^{-\theta x}dx \\ &= E(X^2) - \frac{2}{\theta}E(X) + \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-\theta x}dx \\ &= \frac{2}{\theta^2} - \frac{2}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta^2}e^{-\theta x}\Big|_0^\infty \\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\theta^2}e^{-\theta x} + \frac{1}{\theta^2}e^0 \\ &= \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Dado que la función de densidad de Y presenta la misma forma que la función de densidad de X se puede inferir que la esperanza y varianza de Y son iguales a las calculada con la función de X.

Por definición

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

en consecuencia se tiene que calcular

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\theta^2 e^{-\theta(x+y)} dxdy$$

Integrando por partes $xy\theta^2 e^{-\theta(x+y)}$

$$\begin{array}{ll} u = xy & dv = \theta^2 e^{-\theta(x+y)} \\ du = ydx & v = -\theta e^{-\theta(x+y)}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^\infty \left(-xy\theta e^{-\theta(x+y)} + \int y\theta e^{-\theta(x+y)} dx \right) \Big|_0^\infty dy \\ &= \int_0^\infty \left(-xy\theta e^{-\theta(x+y)} - ye^{-\theta(x+y)} \right) \Big|_0^\infty dy \\ &= \int_0^\infty \Big[\big(-\lim_{x\to\infty} xy\theta e^{-\theta(x+y)} + 0y\theta e^{-\theta(0+y)} \big) \\ &\quad -\big(\lim_{x\to\infty} ye^{-\theta(x+y)} - ye^{-\theta(0+y)} \big) \Big] dy \\ &= \int_0^\infty ye^{-\theta y} dy \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = y & dv = e^{-\theta y} \\ du = dy & v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta y}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \left(-\frac{1}{\theta} ye^{-\theta y} + \int \frac{1}{\theta} e^{-\theta y} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \left(-\frac{1}{\theta} ye^{-\theta y} - \frac{1}{\theta^2} e^{-\theta y} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \left(-\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\theta} ye^{-\theta y} + \frac{1}{\theta} 0e^{-\theta 0} \right) - \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\theta^2} e^{-\theta y} - \frac{1}{\theta^2} e^{-\theta 0} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Por consigiente,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0$$

Ejercicio 5. Considere la siguiente función conjunta.

$$f(x,y) = k(x + y - 2xy^2), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

a) Determine el valor de k para que $f(x,y)$ sea de densidad.
b) Calcule las marginales de X y Y.
c) Calcule la esperanza y la varianza de X y Y.

Solución.
a) La primera propiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad no se cumple, debido a que cuando X y Y toman ciertos valores, por ejemplo cercanos a uno, $f(x,y) \leq 0$.

Como $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, se deduce que $0 < x+y < 2$, además $0 < y^2 < 1$, de esta forma $0 < xy^2 < 1$, por lo que $0 < 2xy^2 < 2$, entonces $x + y - 2xy^2 \geq 0$, para que la función sea de densidad se necesitaría que $k \geq 0$.

La segunda propiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad se demostra a continuación, de donde se obtendrá el valor de k.

$$\begin{aligned}
\int_{R_Y}\int_{R_X} f(x,y)\ dx\ dy &= \int_0^1\int_0^1 k(x+y-2xy^2)\ dx\ dy \\
&= k\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy - x^2y^2\right)\Bigg|_0^1 dy \\
&= k\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - y^2\right) dy \\
&= k\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 \\
&= k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}k,
\end{aligned}$$

por lo tanto $k = \frac{3}{2}$, puesto que $\frac{2}{3}k$ debe ser igual a 1. Entonces

$$f(x,y) = \frac{3}{2}(x+y-2xy^2), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

es de densidad.

b) La marginal de X es

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (x+y-2xy^2)dy \\
&= \frac{3}{2}\left(xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}xy^3\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x\right) \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

y la de Y,

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (x+y-2xy^2)dx \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+xy-x^2y^2\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+y-y^2\right) \\
&= \frac{3}{4}+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2
\end{aligned}
$$

c) La esperanza de X se obtiene

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{R_X} xf_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}xdx \\
&= \frac{1}{6}x^3+\frac{3}{8}x^2\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}+\frac{3}{8} \\
&= \frac{13}{24}
\end{aligned}
$$

y la de Y,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{R_Y} y f_Y(y) dy \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2\right) dy \\
&= \int \frac{3}{4}y+\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}y^3 dy \\
&= \left(\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{2}y^3-\frac{3}{8}y^4\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Enseguida se obtendrá la varianza de X y Y, por medio de la siguiente igualdad.

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Primero se debe calcular

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{R_X} x^2 f_X(x) dx \\
&= \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{8}x^4+\frac{3}{12}x^3\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{4} \\
&= \frac{6}{16},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \frac{6}{16} - \left(\frac{13}{24}\right)^2 \\ &= \frac{6}{16} - \frac{169}{576} \\ &= 0.0815. \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga se obtiene para Y

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y).$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{R_Y} y^2 f_Y(y)dy \\ &= \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}y^2\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^3 - \frac{3}{2}y^4 \; dy \\ &= \left(\frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{8}y^4 - \frac{3}{10}y^5\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{13}{40}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{13}{40} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13}{40} - \left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{40} \\ &= 0.075. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Considere la función

$$f(x,y) = ax^2y^2, \quad \text{donde } x \in \{-1,0\}, y \in \{-1,0,1\},$$
$$(x,y) \in \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1)\}.$$

a) Muestre que f es de densidad.
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) Determine la función de distribución de X.
d) Calcule $P(X=0)$, $P(X \leq 0)$, $P(Y=4)$ y $P(Y \leq 4)$.
e) ¿X y Y son independientes?

Solución.
a) Para que se satisfaga la primera propiedad, $f(x,y) \geq 0$, se necesita que $a \geq 0$ ya que las variables están elevadas al cuadrado y el producto de números no negativos es no negativo.

Ahora se verá si se satisface la segunda propiedad.

$$\begin{aligned}
\sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x,y) &= \sum_{x=-1}^{0}\sum_{y=-1}^{1} ax^2y^2 \\
&= \sum_{x=-1}^{0} ax^2[(-1)^2+0+1] \\
&= \sum_{x=-1}^{0} 2ax^2 \\
&= 2a[(-1)^2+0] \\
&= 2a.
\end{aligned}$$

Para que se satisfaga segunda propiedad se necesita $a = \frac{1}{2}$, puesto que $2a$ debe ser igual a 1.

Por tanto,

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2y^2 \qquad \text{es de densidad.}$$

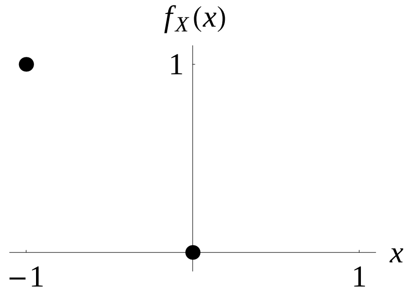
b) La marginal de X es:

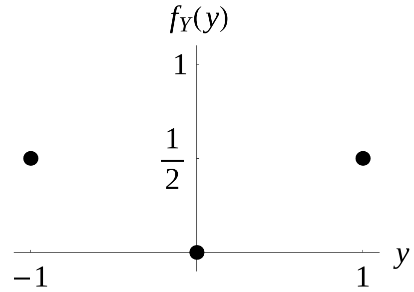
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\
&= \sum_{y=-1}^{1} \frac{1}{2}x^2y^2 \\
&= \frac{1}{2}x^2[(-1)^2+0+1] \\
&= x^2, \quad x \in \{-1,0\}
\end{aligned}$$

y la marginal de Y es

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\
&= \sum_{x=-1}^{0} \frac{1}{2}x^2y^2 \\
&= \frac{1}{2}y^2[(-1)^2+0] \\
&= \frac{1}{2}y^2, \quad y \in \{-1,0,1\}.
\end{aligned}
$$

Sus gráficas son:





c) Puesto que se está trabajando con una función de densidad bivariada y sólo se pide la función de distribución de X, se trata de una función de distribución marginal, para cuyo cálculo puede utilizarse la función de densidad marginal de esta misma variable.

Si $x < -1$,

$$
F(x) = \sum_{u=-\infty}^{x} f_X(u) = 0.
$$

Si $x \in [-1, 0)$,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{u=-\infty}^{x} f_X(u) \\
&= \sum_{u=-\infty}^{x<-1} f_X(u) + f_X(-1) \\
&= 0 + (-1)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

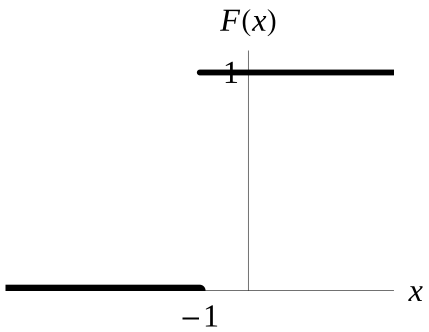
Si $x \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{u=-\infty}^{x} f_X(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{-1} f_X(u) + \sum_{u>-1}^{x} f_X(u) \\ &= F(-1) + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \\ 1, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

y su gráfica es



d) Calcule

$$P(X = 0) \;=\; f_X(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= \sum_{x=-1}^{0} f_X(x) \\ &= \sum_{x=-1}^{0} x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

o bien, usando la función de distribución

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= F_X(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=4) &= f_Y(4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $4 \notin R_Y$.

$$\begin{aligned} P(Y \leq 4) &= \sum_{y=-\infty}^{4} f_Y(y) \\ &= \sum_{y=-\infty}^{y<-1} f_Y(y) + \sum_{y=-1}^{1} f_Y(y) + \sum_{y>1}^{4} f_Y(y) \\ &= 0 + \sum_{y=-1}^{1} \frac{1}{2} y^2 + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

e) Se sabe que X y Y son independientes si y sólo si

$$f(x|y) = f_X(x)$$

Una vez calculada la marginal de cada variable, se verá si la función de densidad de probabilidad condicional de X es igual a la función de densidad marginal de X.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f(x|y) = \frac{\frac{1}{2}x^2y^2}{\frac{1}{2}y^2} = x^2 = f_X(x).$$

Dado lo anterior, se concluye que X y Y son independientes.

Ejercicio 7. Se tiene la función

$$f(x,y) = \frac{1}{5}(cx - y)$$

y sus correspondientes recorridos, $R_X = [1,2]$ y $R_Y = [1,c]$.

a) Calcule el valor de c para el que f es de densidad.
b) Determine la función de distribución.
c) Calcule el valor de $P\left(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq 2\right)$.
d) Calcule la función de densidad marginal de cada variable.

Solución.
a) $f(x,y) \geq 0$ si y sólo si $\frac{1}{5}(cx - y) \geq 0$ o bien $cx \geq y$, con $c > 1$ puesto que $y \in [1,c]$.

Tomando en cuenta que

$$\int_{R_X}\int_{R_Y} f(x,y)dydx = 1,$$

se procede a calcular el valor de c.

$$\begin{aligned}
\int_1^2\int_1^c \frac{1}{5}(cx-y)dydx &= \int_1^2 \frac{1}{5}\left(cxy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^c dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{5}\left(c^2x-\frac{c^2}{2}-cx+\frac{1}{2}\right)dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{5}\left[(c^2-c)x+\frac{1}{2}(1-c^2)\right]dx \\
&= \frac{1}{5}\left[(c^2-c)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(1-c^2)x\right]\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{5}\left[2(c^2-c)+1-c^2-\frac{1}{2}(c^2-c)-\frac{1}{2}(1-c^2)\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[c^2-\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

puesto que $\frac{1}{5}\left[c^2-\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}\right]=1$ se tiene que

$$c^2-\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}=5$$

$$c^2-\frac{3}{2}c-\frac{9}{2}=0$$

$$\begin{aligned}
c &= \frac{-(-\frac{3}{2})\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{36}{2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}}{2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\pm\frac{9}{2}}{2} \\
&= \begin{cases} 3, \\ -\frac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como $f(x,y)$ debe ser no negativa $\forall x \in R_X$ y $y \in R_Y$, $c = 3$, por tanto

$$f(x,y)=\frac{1}{5}(3x-y)$$

sí es función de densidad.

b) Si $x \leq 1$ y $-\infty \leq y \leq \infty$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $1 \leq x \leq 2$ y $y \leq 1$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu + \int_{1}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 3$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu + \int_{1}^{x}\left[\int_{-\infty}^{1} 0dvdu + \int_{1}^{y}\frac{1}{5}(3u-v)dvdu\right] \\ &= \int_{1}^{x}\int_{1}^{y}\frac{1}{5}(3u-v)dvdu \\ &= \int_{1}^{x}\frac{1}{5}\left(3uv-\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{y}du \\ &= \frac{1}{5}\int_{1}^{x}\left(3uy-\frac{y^2}{2}-3u+\frac{1}{2}\right)du \\ &= \frac{1}{5}\int_{1}^{x}\left[(y-1)3u-\frac{1}{2}(y^2-1)\right]du \\ &= \frac{1}{5}\left[(y-1)\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}(y^2-1)u\right]\Bigg|_{1}^{x} \\ &= \frac{1}{10}[3(x^2-1)(y-1)-(x-1)(y^2-1)]. \end{aligned}$$

Si $1 \leq x < 2$ y $y \geq 3$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{3} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{x}\int_{3}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= F(x,3) + \int_{-\infty}^{x}\int_{3}^{y} 0dvdu \\
&= \frac{1}{10}[6(x^2-1^2) - 8(x-1)] \\
&= \frac{1}{5}(3x^2 - 3 - 4x + 4) \\
&= \frac{1}{5}(3x^2 - 4x + 1) = F(x)
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $y \leq 1$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{1} 0dvdu \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $1 \leq y \leq 3$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{2} f(u,v)dudv + \int_{-\infty}^{y}\int_{2}^{x} f(u,v)dudv \\
&= F(2,y) + \int_{-\infty}^{y}\int_{2}^{x} 0dudv \\
&= \frac{1}{10}\left[9(y-1) - (y^2-1)\right] \\
&= \frac{1}{10}(9y - y^2 - 8).
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $y \geq 3$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\left[\int_{-\infty}^{3} f(u,v)dvdu + \int_{3}^{y} f(u,v)dvdu\right] \\
&\quad + \int_{2}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{3} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{2}\int_{3}^{y} 0dvdu \\
&\quad + \int_{2}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\
&= F(2,3) \\
&= \frac{1}{10}[3(4-1)(3-1)-(2-1)(9-1)] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$F(x,y) = \begin{cases}
0, & \text{si } x < 1, -\infty < y < \infty \ \text{ y} \\
 & -\infty < x < \infty, y < 1 \\
\frac{1}{5}(3x^2-4x+1), & \text{si } 1 \leq x < 2, \quad y \geq 3 \\
\frac{1}{10}[3(x^2-1)(y-1)-(x-1)(y^2-1)], & \text{si } 1 \leq x < 2, \quad 1 \leq y < 3 \\
\frac{1}{10}(9y-y^2-8), & \text{si } x \geq 2, \quad 1 \leq y < 3 \\
1, & \text{si } x \geq 2, \quad y \geq 3.
\end{cases}$$

c) Calcule

$$\begin{aligned}
P\left(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq 2\right) &= F\left(\frac{3}{2}, 2\right) \\
&= \frac{1}{10}\left[3\left(\frac{9}{4}-1\right)(2-1) - \left(\frac{3}{2}-1\right)(4-1)\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[3\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{9}{40}.
\end{aligned}$$

Otra forma de calcular esta probabilidad es utilizando la función de densidad.

$$
\begin{aligned}
P\left(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq 2\right) &= \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{2} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{2} \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{2} \left[\int_{-\infty}^{1} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x,y)dxdy\right] \\
&= \int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} 0dxdy + \int_{1}^{2} \int_{-\infty}^{1} 0dxdy + \int_{1}^{2} \int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{1}^{2} \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{5}(3x-y)dxdy \\
&= \frac{1}{5} \int_{1}^{2} \left(\frac{3}{2}x^2 - yx\right)\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} dy \\
&= \frac{1}{5} \int_{1}^{2} \left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}^2 - 1^2\right) - \left(\frac{3}{2} - 1\right)y\right] dy \\
&= \frac{1}{5} \int_{1}^{2} \left(\frac{15}{8} - \frac{1}{2}y\right) dy \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{15}{8}y - \frac{1}{4}y^2\right)\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{15}{8}(2-1) - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2)\right] \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{9}{8}\right) \\
&= \frac{9}{40}.
\end{aligned}
$$

d) La distribución de X se puede calcular a partir de dos formas:

- Cálculo a partir de la función de densidad conjunta.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\ &= \int_1^3 \frac{1}{5}(3x-y)dy \\ &= \frac{1}{5}\left(3xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{1}{5}\left[3x(3-1) - \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{5}(6x-4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{5}(3x-y)dx \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}x^2 - yx\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{2}(4-1) - y(2-1)\right] \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{9}{2} - y\right) \\ &= \frac{1}{10}(9-2y). \end{aligned}$$

- Cálculo a partir de la función de distribución

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv \\ &= \int_1^2\int_1^3 \frac{1}{5}(3x-y)dydx. \end{aligned}$$

$*$) Como

$$f_X(x) = \int_1^3 \frac{1}{5}(3x-y)dy$$

entonces se deriva $F(x,y)$ respecto a x y se evalúa en el recorrido de Y para obtener la distribución de X, esto es,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \left(\frac{d}{dx}F(x,y)\right)\Bigg|_{y=1}^{3} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{10}\left[3\left(x^2-1\right)(y-1)-(x-1)\left(y^2-1\right)\right]\right\}\right)\Bigg|_{y=1}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\left[3\,(2x)\,(y-1)-\left(y^2-1\right)\right]\Big|_{y=1}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\left[6x\,(3-1-1+1)-\left[(9-1)-(1-1)\right]\right] \\
&= \frac{1}{10}\,(12x-8) \\
&= \frac{1}{5}\,(6x-4)\,.
\end{aligned}$$

$*$) Como

$$f_X(x)=\int_1^3\frac{1}{5}(3x-y)dy,$$

primero se evalúa $F(x,y)$ en el recorrido de Y para obtener $F_X(x)$, en seguida se deriva respecto a x para obtener $f_X(x)$.

$$\begin{aligned}
F_X(x)=F(x,y)\big|_{y=1}^{3} &= \frac{1}{10}\left[3\left(x^2-1\right)(y-1)-(x-1)\left(y^2-1\right)\right]\Big|_{y=1}^{3} \\
&= \frac{1}{10}\left\{3\left(x^2-1\right)\left[3-1-(1-1)\right]-(x-1)[9-1-(1-1)]\right\} \\
&= \frac{1}{10}(6x^2-6-8x+8) \\
&= \frac{1}{10}(6x^2-8x+2) \\
&= \frac{1}{5}(3x^2-4x+1)
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{d}{dx}F_X(x) \\
&= \frac{1}{5}(6x-4).
\end{aligned}$$

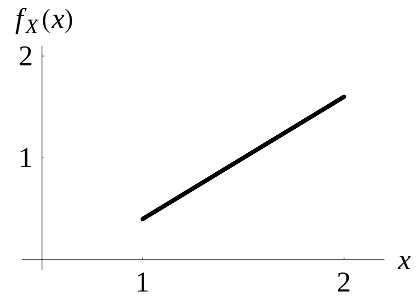
Análogamente, para calcular $F_Y(y)$ se evalúa $F(x,y)$ en el recorrido de X:

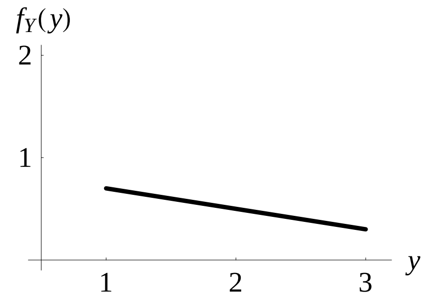
$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \frac{1}{10}\left[3\left(x^2-1\right)(y-1)-\left(y^2-1\right)(x-1)\right]\Big|_{x=1}^{2} \\
&= \frac{1}{10}\left\{3\left[4-1-(1-1)\right](y-1)-(y^2-1)\left[2-1-(1-1)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{10}\left(9y-9-y^2+1\right) \\
&= \frac{1}{10}\left(9y-8-y^2\right),
\end{aligned}$$

y ahora se deriva respecto a y,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) \\ &= \frac{1}{10}(9-2y). \end{aligned}$$

Las gráficas de las funciones de densidad de X y Y respectivamente, son:





Ejercicio 8. Considérese la función de densidad

$$f(x,y) = xe^{-x(y+1)} \quad \text{con} \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

a) ¿f es de densidad?
b) Calcule $P(X \leq 2, Y \leq 1)$
c) Obtenga las funciones de densidad marginales.
d) ¿X yY son independientes?

Solución.
a) Puesto que $x \geq 0$ y la exponencial es positiva, por tanto $f(x,y)$ es positiva, ya que el producto de dos números positivos es positivo, por ende, se cumple con la primera propiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad. Para la segunda propiedad se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dydx &= \int_0^\infty -e^{-x(y+1)}\Big|_0^\infty dx \\ &= \int_0^\infty -(\lim_{y\to\infty} e^{-x(y+1)} - e^{-x})dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}dx \\ &= -e^{-x}\Big|_0^\infty \\ &= -(\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo que $f(x,y)$ sí es de densidad.

b) Calcule

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2, Y \leq 1) &= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{1} f(x,y)dydx \\
&= \int_{0}^{2}\int_{0}^{1} xe^{-x(y+1)}dydx \\
&= \int_{0}^{2} -e^{-x(y+1)}\Big|_0^1 dx \\
&= \int_{0}^{2} -\left(e^{-2x} - e^{-x}\right) dx \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2}e^{-4} - e^{-2} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-4} - e^{-2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

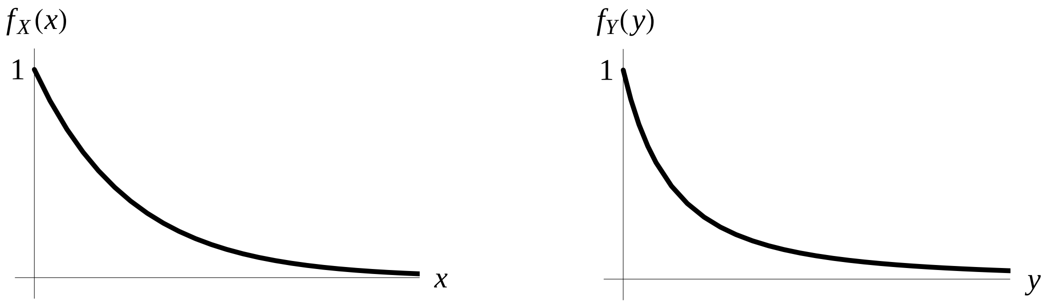
c) La marginal de X está dada por

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\
&= \int_{0}^{\infty} xe^{-x(y+1)}dy \\
&= -e^{-x(y+1)}\Big|_0^{\infty} \\
&= -\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x(y+1)} - e^{-x}\right) \\
&= e^{-x},\ x \in (0,\infty)
\end{aligned}$$

y la marginal de Y es[1]

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\
&= \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dx \\
&= -\left(\frac{x}{y+1}e^{-x(y+1)}\right)\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{y+1}e^{-x(y+1)}dx \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{y+1}e^{-x(y+1)} - 0\right) - \frac{1}{(y+1)^2}e^{-x(y+1)}\Bigg|_0^{\infty} \\
&= 0 - \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(y+1)^2}e^{-x(y+1)} - \frac{1}{(y+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{(y+1)^2},\ y \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Sus gráficas son:



d)Independencia

$$\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) &= \frac{1}{(y+1)^2}e^{-x} \\
&\neq f(x,y).
\end{aligned}$$

por tanto X, Y no son independientes.

[1]Esta integral se hace por partes

$$u = x \qquad dv = e^{-x(y+1)}dx$$

$$du = dx \quad v = -\tfrac{1}{y+1}e^{-x(y+1)}.$$

Otra forma de proceder es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
f(x|y) &= \frac{xe^{-x(y+1)}}{\frac{1}{(y+1)^2}} \\
&= x(y+1)^2 e^{-x(y+1)} \\
&\neq f_X(x),
\end{aligned}
$$

ambos procedimientos indican que X y Y no son independientes.

Ejercicio 9. Sea $f(x,y) = x + y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$, una función de densidad.

a) Calcule las funciones de densidad marginal.
b) Calcule la función de distribución de X.
c) Calcule la función de distribución conjunta.

Solución.
a) La función de densidad marginal de X es

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy \\
&= \int_0^1 (x+y)dy \\
&= \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 \\
&= x + \frac{1}{2},\ 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

de manera análoga, siguiendo el mismo procedimiento, la de Y es

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx \\
&= y + \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1.
\end{aligned}
$$

b) La función de distribución de X se calcula como Si $x \in (-\infty, 0)$,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0du \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Si $x \in [0,1)$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \left(u + \frac{1}{2}\right)du \\ &= F(0) + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{2}\right)\Big|_0^x \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \in [1,\infty)$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{1} f_X(u)du + \int_{1}^{\infty} 0du \\ &= F(1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

c) En el cálculo de la función de distribución debe tenerse presente que si alguna de las variables o las dos, no están en sus correspondientes recorridos, $f(x,y) = 0$. Por ejemplo, si $x \in [0,1]$ y $y > 1$, $f(x,y) = 0$ ya que, aunque x está en su recorrido, y no y esto hace que la función de densidad conjunta sea cero.

Si $x \leq 0$ y $-\infty < y < \infty$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x \leq 1$ y $y < 0$, dado que

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $x \in [0,1]$ y $y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu + \int_{0}^{x}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{y} f(u,v)dv\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0dvdu + \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} (u+v)dvdu \\
&= \int_{0}^{x}\left(uv + \frac{v^2}{2}\right)\Big|_{0}^{y}du \\
&= \int_{0}^{x}\left(uy + \frac{y^2}{2}\right)du \\
&= \left(\frac{u^2}{2}y + \frac{y^2}{2}u\right)\Big|_{0}^{x} \\
&= \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x.
\end{aligned}$$

Si $x \in [0,1]$ y $y \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dv + \int_{1}^{y} f(u,v)dv\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= F(x,1) + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} 0dvdu \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Si $x \geq 1$ y $y \leq 0$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x \geq 1$ y $y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dudv + \int_{-\infty}^{y}\int_{1}^{x} f(u,v)dudv \\ &= F(1,y) + \int_{-\infty}^{y}\int_{1}^{x} 0dudv \\ &= \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \geq 1$ y $y \geq 1$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{1} f(u,v)du + \int_{1}^{x} f(u,v)du\right]dv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{y}\int_{1}^{x} 0dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{1}\left[\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dv + \int_{1}^{y} f(u,v)dv\right]du \\ &= \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{1}\int_{1}^{y} 0dvdu \\ &= F(1,1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De manera que

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ y } -\infty < y < \infty \text{ o} \\ & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}xy(x+y), & \text{si } x \in [0,1] \text{ y } y \in [0,1] \\ F_X(x), & \text{si } x \in [0,1] \text{ y } y \geq 1 \\ F_Y(y), & \text{si } x \geq 1 \text{ y } y \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \text{ y } y \geq 1. \end{cases}$$

o de manera equivalente,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ y } -\infty < y < \infty \text{ o} \\ & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}xy(x+y), & \text{si } x \in [0,1] \text{ y } y \in [0,1] \\ \dfrac{1}{2}(x^2+x), & \text{si } x \in [0,1] \text{ y } y \geq 1 \\ \dfrac{1}{2}(y^2+y), & \text{si } x \geq 1 \text{ y } y \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \text{ y } y \geq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 10. Considérese la función $f(x,y) = kxy$ y sus correspondientes recorridos $x \in \{1,2,3\}$ y $y \in \{2,3,4\}$.

a) ¿Qué valor de k hace que f sea de densidad?
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) ¿X y Y son independientes?
d) $P(X = 2, Y = 3)$ y cambiar $P(X \geq 2, Y \leq 3)$.

Solución.
a) Dado que $x \in \{1,2,3\}$ y $y \in \{2,3,4\}$ toman valores positivos y el producto de números positivos es positivo, k debe ser positiva para que se cumpla con la primera propiedad, $f(x,y) \geq 0$.

Ahora se muestra la segunda porpiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad.

$$\sum_{R_Y} \sum_{R_X} f(x,y)\ dx = 1.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{R_Y}\sum_{R_X} f(x,y) &= \sum_{y=2}^{4}\sum_{x=1}^{3} kxy \\
&= \sum_{y=2}^{4} ky(1+2+3) \\
&= 6k(2+3+4) \\
&= 54k
\end{aligned}
$$

dado que $54k = 1$, $k = \frac{1}{54}$. Por tanto,

$$f(x,y) = \tfrac{1}{54}xy \qquad \text{es de densidad.}$$

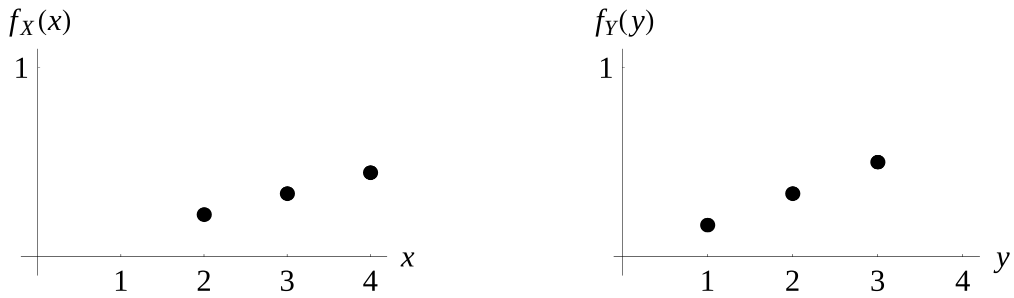
b) La marginal de X es:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\
&= \sum_{y=2}^{4} \frac{1}{54}xy \\
&= \frac{1}{54}x\sum_{y=2}^{4} y \\
&= \frac{1}{54}x(2+3+4) \\
&= \frac{9}{54}x \\
&= \frac{1}{6}x,\ \ x \in \{1,2,3\}
\end{aligned}
$$

y la marginal de Y es:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\
&= \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{54}xy \\
&= \frac{1}{54}y\sum_{x=1}^{3} x \\
&= \frac{1}{54}y\ (1+2+3) \\
&= \frac{6}{54}y \\
&= \frac{1}{9}y,\ \ y \in \{2,3,4\}.
\end{aligned}$$

Sus gráficas son:



c) ¿X y Y son independientes?

Una vez calculada la marginal de cada variable, se verá si la función de densidad de probabilidad condicional de X es igual a la función de densidad marginal de X.

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\frac{1}{54}xy}{\frac{1}{9}y} \\ &= \frac{9}{54}x \\ &= \frac{1}{6}x \\ &= f_X(x), \end{aligned}$$

dado lo anterior se concluye que X y Y sí son independientes.

d) Calcule

$$\begin{aligned} P(X=2, Y=3) &= f(2,3) \\ &= \frac{1}{54}(2 \cdot 3) \\ &= \frac{6}{54} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Otra forma es usar el hecho de que X y Y son independientes, en cuyo caso

$$\begin{aligned} P(X=2, Y=3) &= P(X=2)P(Y=3) \\ &= f_X(2)f_Y(3) \\ &= \frac{2}{6}\left(\frac{3}{9}\right) \\ &= \frac{6}{54} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2, Y \leq 3) &= \sum_{y=-\infty}^{3} \sum_{x=2}^{\infty} f(x,y) \\
&= \sum_{y=2}^{3} \sum_{x=2}^{3} \frac{1}{54} yx \\
&= \sum_{y=2}^{3} \frac{1}{54} y(2+3) \\
&= \sum_{y=2}^{3} \frac{5}{54} y \\
&= \frac{5}{54}(2+3) \\
&= \frac{25}{54}.
\end{aligned}$$

Solucionando considerando que X y Y son independientes, se tiene

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2, Y \leq 3) &= P(X \geq 2)P(Y \leq 3) \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} f_X(x) \sum_{y=-\infty}^{3} f_Y(y) \\
&= \sum_{x=2}^{3} \frac{1}{6} x \sum_{y=2}^{3} \frac{1}{9} y \\
&= \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right) \\
&= \frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}\right) \\
&= \frac{25}{54}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. Considérese la función $f(x,y) = xy, \; x \in [0,a], \; y \in [0,1]$.

a) Calcule el valor de a que hace que $f(x,y)$ sea de densidad.
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) ¿X y Y son independientes?
d) Calcule la función de distribución conjunta.
e) Si los recorridos de X y Y ahora son $x \in [a,2]$ y $y \in [a,1]$, ¿Cuál es el valor de a para el que $f(x,y)$ es de densidad?
f) Calcule $P(-1 < Y < 1)$.
g) Obtenga la $Corr(X,Y)$.
h) Calcule $E(Y|X)$.

Solución.
a) Es claro que la primera propiedad, $f(x,y) \geq 0$, se cumple , ya que los recorridos de ambas variables tienen como límite inferior a 0, y el producto de dos números no negativos es no negativo. Ahora se verá la segunda propiedad,

$$\int_{R_X}\int_{R_Y} f(x,y)dydx = 1.$$

$$\begin{aligned}\int_0^a\int_0^1 xy\ dydx &= \int_0^a x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 dx\\ &= \int_0^a \frac{x}{2}dx\\ &= \frac{x^2}{4}\bigg|_0^a\\ &= \frac{a^2}{4},\end{aligned}$$

puesto que $\dfrac{a^2}{4}$ debe ser igual a 1, se tiene que $a = \pm 2$, sin embargo, como a es el límite superior de R_X, a debe ser positiva, por tanto, para que $f(x,y)$ sea de densidad, el recorrido de X debe ser [0,2].

b) La función de densidad marginal de X es

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)dy\\ &= \int_0^1 xy\ dy\\ &= x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\\ &= \frac{x}{2},\ 0 \leq x \leq 2\end{aligned}$$

y la marginal de Y es

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)dx\\ &= \int_0^2 xy\ dx\\ &= y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2\\ &= 2y,\ 0 \leq y \leq 1.\end{aligned}$$

c) ¿X y Y son independientes?

Dado que

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= \left(\frac{x}{2}\right)2y \\ &= xy \\ &= f(x,y), \end{aligned}$$

X y Y sí son independientes.

d) La función de distribución conjunta

Si $x < 0$ y $y < 0$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 0dudv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x < 0$ y $0 \leq y \leq 1$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{y} f(u,v)dv\right]du \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{x}\int_{0}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0dvdu + \int_{-\infty}^{x}\int_{0}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x < 0$ y $y \geq 1$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{1} f(u,v)dv + \int_{1}^{y} f(u,v)dv\right]du \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{x} f_U(u)du + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0dvdu + F_X(x) + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} 0dvdu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x \leq 2$ y $y < 0$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $x \in [0,2)$ y $y \in [0,1)$,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)du + \int_{0}^{x} f(u,v)du\right]dv \\ &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dudv + \int_{-\infty}^{y}\int_{0}^{x} f(u,v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{y} f(u,v)dv\right]du \\ &\quad + \int_{0}^{x}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{y} f(u,v)dv\right]du \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{y} f(u,v)dvdu \\ &\quad + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(u,v)dvdu \\ &= F(0,0) + \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{y} 0dvdu \\ &\quad + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0dvdu + \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} uv\ dvdu \\ &= \int_{0}^{x} \left.\frac{uv^2}{2}\right|_{0}^{y} du \\ &= \int_{0}^{x} \frac{uy^2}{2} du \\ &= \left.\frac{u^2y^2}{4}\right|_{0}^{x} \\ &= \frac{x^2y^2}{4}. \end{aligned}$$

Si $x \in [0,2)$ y $y \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dv + \int_{0}^{1} f(u,v)dv + \int_{1}^{y} f(u,v)dv\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{x} f_U(u)du + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0dvdu + F_X(x) + \int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{y} 0dvdu \\
&= \frac{x^2}{4}.
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $y < 0$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $y \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\
&= F_Y(y) \\
&= y^2.
\end{aligned}$$

Si $x \geq 2$ y $y \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{2} f(u,v)du + \int_{2}^{x} f(u,v)du\right] dv \\
&= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{2} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{y}\int_{2}^{x} 0dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{2}\left[\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dv + \int_{1}^{y} f(u,v)dv\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{2}\int_{-\infty}^{1} f(u,v)dvdu + \int_{-\infty}^{2}\int_{1}^{y} 0dvdu \\
&= F(2,1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De manera que

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{y } -\infty < y < \infty \text{ o} \\ & \text{si } x > 0 \text{y } y < 0 \\ \dfrac{x^2y^2}{4}, & \text{si } x \in [0,2) \text{y } y \in [0,1) \\ \\ F_X(x), & \text{si } x \in [0,2) \text{y } y \geq 1 \\ \\ F_Y(y), & \text{si } x \geq 2 \text{y } y \in [0,1) \\ \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \text{y } y \geq 1. \end{cases}$$

o de manera equivalente,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{y } -\infty < y < \infty \text{ o} \\ & \text{si } x > 0 \text{y } y < 0 \\ \dfrac{x^2y^2}{4}, & \text{si } x \in [0,2) \text{y } y \in [0,1) \\ \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{si } x \in [0,2) \text{y } y \geq 1 \\ \\ y^2, & \text{si } x \geq 2 \text{y } y \in [0,1) \\ \\ 1, & \text{si} x \geq 2 \text{y} y \geq 1. \end{cases}$$

e) Si los recorridos de X y Y ahora son $x \in [a,2]$ y $y \in [a,1]$, ¿Cuál es el valor de a para el que $f(x,y)$ es de densidad?

La no negatividad de f se satisface si $a \geq 0$. Ahora se verá bajo qué condiciones se cumple que

$$\int_a^1 \int_a^2 xy \; dxdy = 1 :$$

$$\begin{aligned} \int_a^1 \int_a^2 xy \; dxdy &= \int_a^1 y \frac{x^2}{2}\bigg|_a^2 dy \\ &= \int_a^1 \left[\frac{1}{2}(4-a^2)\right] ydy \\ &= \frac{1}{2}(4-a^2)\frac{y^2}{2}\bigg|_a^1 \\ &= \frac{1}{4}(4-a^2)(1-a^2) \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{1}{4}(4-a^2)(1-a^2)$ debe ser igual a 1, entonces, se debe determinar a tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(4-a^2)(1-a^2) &= 1 \\ 4-a^2-4a^2+a^4 &= 4 \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$a^4-5a^2 = a^2(a^2-5) = 0,$$

de donde se obtiene una raíz doble $a=0$, y $a=\pm\sqrt{5}$. Dado que a debe ser positiva, puede tomar los valores 0 y $\sqrt{5}$. Sin embargo, este último valor, queda desechado ya que a debe ser el límite inferior del intervalo $[a,2]$ y $\sqrt{5}>2$. Con todo lo anterior, se concluye que $f(x,y)=x^2y$ es de densidad si $a=0$ y por tanto, $R_X=[0,2]$ y $R_Y=[0,1]$.

Otra forma de calcular el valor de a para el que f es de densidad es a partir de alguna de las funciones marginales. A continuación se determina utilizando la de Y.

$$\begin{aligned} \int_{R_Y} f_Y(y)dy &= \int_a^1 2ydy \\ &= y^2\Big|_a^1 \\ &= 1-a^2 \end{aligned}$$

dado que $1-a^2$ debe ser igual a 1, por ende, $a=0$.

f) Calcule

$$\begin{aligned} P(-1<Y<1) &= P(0<Y<1) \\ &= P(0\le Y\le 1) \\ &= \int_0^1 f_Y(y)dy \\ &= 1, \end{aligned}$$

dado que la función es de densidad y se está evaluando en el recorrido de Y.

g) Dado que las variables X y Y son independientes, $Corr(X,Y)=0$. Sin embargo, a continuación se muestra de manera detallada cómo obtener esa correlación. Dado que

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

y

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y),$$

primero se procederá al cálculo de las esperanzas. Las de X y X^2 son, de manera respectiva:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{R_X} x f_X(x)dx \\
&= \int_0^2 x\frac{x}{2}dx \\
&= \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{R_X} x^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^2 x^2\frac{x}{2}dx \\
&= \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Las de Y y Y^2 son:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{R_Y} y f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 y2y\ dy \\
&= \left.\frac{2}{3}y^3\right|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{R_Y} y^2 f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 2y^3dy \\
&= \left.\frac{2}{4}y^4\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Y la de XY es:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{R_X}\int_{R_Y} xyf(x,y)dydx \\ &= \int_0^2\int_0^1 x^2y^2dydx \\ &= \int_0^2 x^2\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1 dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 x^2dx \\ &= \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 \\ &= \frac{8}{9}, \end{aligned}$$

con los resultados anteriores se calculan las varianzas de X y Y y la covarianza entre ellas.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{8}{9} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por último,

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2}{9}}\ \sqrt{\frac{1}{18}}} = 0.$$

h) Dado que X y Y son independientes,

$$f(y|x) = f_Y(y)$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= \int_{R_Y} yf(y|x)dy \\ &= \int_0^1 yf_Y(y)dy \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

Sin embargo, si no se supiera que X y Y son independientes se procedería como sigue:

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= \int_{R_Y} yf(y|x)dy \\ &= \int_{R_Y} y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy \\ &= \int_0^1 y\frac{xy}{\frac{x}{2}}dy \\ &= \int_0^1 2y^2dy \\ &= \frac{2}{3}y^2\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

Ejercicio 12. Sea la función

$$f(x,y,z) = (x+y)e^{-z}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad z > 0.$$

a) Determine si la función es de densidad.
b) ¿Cambia su respuesta si considera que los recorridos de las variables son intervalos cerrados en lugar de abiertos?
c) Determine la conjunta de X y Y y la de X y Z.
d) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ y $E(Z)$.
e) Calcule $Cov(X,Y)$.
f) Calcula $P(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y < 1, Z < 1)$.

Solución.

a) La función sí es de densidad, ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)dx\ dy\ dz &= \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 (x+y)e^{-z}dx\ dy\ dz \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-z}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_0^1 dy\ dz \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-z}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy\ dz \\
&= \int_0^\infty e^{-z}\left(\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dz \\
&= \int_0^\infty e^{-z}dz \\
&= -e^{-z}\big|_0^\infty \\
&= \lim_{z\to\infty}\big[-e^{-z}\big]-\big[-e^0\big] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) La respuesta no cambia, ya que la probabilidad de que una v. a. c. tome un valor correspondiente a un número real es igual a cero.

c) Determine

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int_{R_Z} f(x,y,z)dz \\
&= \int_0^\infty (x+y)e^{-z}dz \\
&= -(x+y)e^{-z}\big|_0^\infty \\
&= \lim_{z\to\infty}\big[-(x+y)e^{-z}\big]-\big[-(x+y)e^0\big] \\
&= x+y.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x,z) &= \int_{R_Y} f(x,y,z)dy \\
&= \int_0^1 (x+y)e^{-z}dy \\
&= \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)e^{-z}\Big|_0^1 \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-z}.
\end{aligned}
$$

d) Calcule

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{R_X} x f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_{R_Y} f(x,y)dy\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_0^1 (x+y)dy\right)dx \\
&= \int_0^1 x\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

Las marginales de Y y Z son:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{R_X}\int_{R_Z} f(x,y,z)dz\ dx \\
&= \int_0^1\int_0^\infty (x+y)e^{-z}dz\ dx \\
&= \int_0^1 -(x+y)e^{-z}\Big|_0^\infty dx \\
&= \int_0^1 (x+y)dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Big|_0^1 \\
&= y+\frac{1}{2},\ \ 0<y<1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{R_X} f(x,z)dx \\
&= \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-z}dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)e^{-z}\Big|_0^1 \\
&= e^{-z},\ \ z>0.
\end{aligned}$$

El desarrollo para calcular $E(Y)$ se obvia debido a que la forma funcional es la misma que en el caso de X.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{R_Y} y f_Y(y)dy \\
&= \int_0^1 y\left(y+\frac{1}{2}\right)dy \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{R_Z} z f_Z(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} z e^{-z} dz \\ &= -ze^{-z} + \int e^{-z} dz \\ &= -e^{-z}(z+1)\Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{z\to\infty} \big[-e^{-z}(z+1)\big] - \big[-e^{0}(0+1)\big] \\ &= 1. \end{aligned}$$

e)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{R_X}\int_{R_Y} xyf(x,y)dydx \\ &= \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\ dydx \\ &= \int_0^1\int_0^1 (x^2y + xy^2)\ dydx \\ &= \int_0^1 \left(x^2\frac{y^2}{2} + x\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{2}{6} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right) \\ &= \frac{2}{6} - \frac{49}{144} \\ &= -\frac{1}{144}. \end{aligned}$$

f)

$$
\begin{aligned}
P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y < 1, Z < 1\right) &= \int_{-\infty}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}} (x+y)e^{-z}dxdydz \\
&= \int_{0}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x^2}{2}+yx\right)e^{-z}\Big|_0^{\frac{1}{2}} dydx \\
&= \int_{0}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(\frac{1}{8}+\frac{y}{2}\right)e^{-z} - (0)\,e^{-z}\right] dydx \\
&= \int_{0}^{1} \left[\left(\frac{1}{8}y+\frac{y^2}{4}\right)e^{-z}\right]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} dz \\
&= \int_{0}^{1} \left[\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\right] e^{-z}dz \\
&= \int_{0}^{1} \left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right) e^{-z}dz \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1}{4}e^{-z}dz \\
&= -\frac{1}{4}e^{-z}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{-1}-e^{0}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1-e^{-1}\right),
\end{aligned}
$$

la segunda igualdad se establece como consecuencia de que $f(x,y,z) = 0, \forall z \leq 0$.

Ejercicio 13. Considérese la siguiente función

$$f(x,y) = k(2y^2 - xy),\ x \in \{0,1\},\ y \in \{0,1,2\}.$$

a) Halle el valor de k para el que $f(x,y)$ es de densidad.
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) Calcule la función de densidad condicional $f(x|y)$.

Solución.
a) $f(x,y) \geq 0$ si y sólo si $k \geq 0$, como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 0, \quad f(0,1) = 2k, \quad f(0,2) = 8k, \\
f(1,0) &= 0, \quad f(1,1) = k, \quad\ \ f(1,2) = 6k.
\end{aligned}
$$

A continuación se analiza la segunda propiedad, esto permitirá hallar el valor de k que hace que $f(x,y)$ sea de densidad.

$$\begin{aligned}\sum_{y=0}^{2}\sum_{x=0}^{1} f(x,y) &= \sum_{y=0}^{2}[f(0,y)+f(1,y)]\\ &= f(0,0)+f(0,1)+f(0,2)+f(1,0)+f(1,1)+f(1,2)\\ &= 0+2k+8k+0+k+6k\\ &= 17k\\ &= 1,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $k=\frac{1}{17}$ y por tanto,

$$f(x,y)=\frac{1}{17}(2y^2-xy),\ \forall x\in R_X,\ \forall y\in R_Y,$$

es una función de densidad.

b) La marginal de X es

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y)\\ &= \sum_{y=0}^{2}\frac{1}{17}(2y^2-xy)\\ &= \frac{1}{17}[0+(2-x)+(8-2x)]\\ &= \frac{1}{17}(10-3x),\ x\in\{0,1\}\end{aligned}$$

o bien,

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{17}, & \text{si } x=0\\[2ex] \dfrac{7}{17}, & \text{si } x=1.\end{cases}$$

La marginal de Y es

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y)\\ &= \sum_{x=0}^{1}\frac{1}{17}(2y^2-xy)\\ &= \frac{1}{17}[2y^2+(2y^2-y)]\\ &= \frac{1}{17}(4y^2-y),\ y\in\{0,1,2\}\end{aligned}$$

o bien,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = 0 \\ \\ \dfrac{3}{17}, & \text{si } y = 1 \\ \\ \dfrac{14}{17}, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

c) Primero se utiliza la forma algebraica de las funciones de densidad para calcular la función de densidad condicional.

$$f(x|y) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{17}(2y^2 - xy)}{\frac{1}{17}(4y^2 - y)}$$

$$f(x|y) \;=\; \begin{cases} \text{No definida}, & \text{si } y = 0 \\ \\ \dfrac{2-x}{3}, & \text{si } y = 1 \\ \\ \dfrac{8-2x}{14}, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

O equivalentemente,

$$f(x|y=0) \text{ no está definida,}$$

$$f(x|y=1) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{1}{3}, & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x|y=2) = \begin{cases} \dfrac{4}{7}, & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{3}{7}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Otra forma de obtener este resultado es dando valores en su recorrido, a la variable Y, tal y como se muestra a continuación.

Si $y = 0$,

$$f(x|y=0) \;=\; \frac{f(x,0)}{f_Y(0)},$$

este cociente no está definido porque $f_Y(0) = 0$.

Si $y = 1$,

$$\begin{aligned} f(x|y=1) &= \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{17}(2-x)}{\frac{3}{17}} \\ &= \frac{1}{3}(2-x) \end{aligned}$$

o bien,

$$f(x|y=1) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{1}{3}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Si $y = 2$,

$$\begin{aligned} f(x|y=2) &= \frac{f(x,2)}{f_Y(2)} \\ &= \frac{\frac{1}{17}[2(2)^2 - 2x]}{\frac{1}{17}[4(2)^2 - 2]} \\ &= \frac{2(4-x)}{2(8-1)} \\ &= \frac{1}{7}(4-x) \end{aligned}$$

o bien,

$$f(x|y=2) = \begin{cases} \dfrac{4}{7}, & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{3}{7}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 14. Considere la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & x = 1,2, \quad y = 1,2,3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para que f sea de densidad.
b) Calcule las marginales.
c) ¿X y Y son independientes?
d) Determine $f(x|y)$ y $f(y|x)$.
e) Calcula $Cov(X,Y)$.

Solución.

a) Como las variables sólo toman valores positivos, $f(x,y) \geq 0$ si y sólo si $k \geq 0$.

Dado que

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} kx^2y &= k\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} x^2y \\ &= k\sum_{x=1}^{2} x^2(1+2+3) \\ &= 6k\sum_{x=1}^{2} x^2 \\ &= 6k(1+4) \\ &= 30k\end{aligned}$$

entonces $k = \dfrac{1}{30}$, ya que $30k$ debe ser igual a 1, para que f sea de densidad.

b) La marginal de X es:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{30}x^2y \\ &= \frac{1}{30}x^2(1+2+3) \\ &= \frac{1}{5}x^2, \quad x \in \{1,2\}.\end{aligned}$$

Y la de Y es:

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\ &= \sum_{x=1}^{2} \frac{1}{30}x^2y \\ &= \frac{1}{30}(1+4)y \\ &= \frac{1}{6}y, \quad y \in \{1,2,3\}.\end{aligned}$$

c) Dado que

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{30}x^2y = f(x,y),$$

X y Y sí son independientes.

d) Como las variables X y Y son independientes,

$$f(x|y) = f_X(x) = \frac{1}{5}x^2$$

y

$$f(y|x) = f_Y(y) = \frac{1}{6}y$$

para $x \in \{1, 2\}$ y $y \in \{1, 2, 3\}$, de manera respectiva.

e) La $Cov(X, Y) = 0$ ya que X y Y son independientes.

Ejercicio 15. Para cada uno de los siguientes cuadros de probabilidades

i.

$y\backslash x$	0	1
0	0	0.25
1	0.25	0.5

ii.

$x\backslash y$	0	1
0	0.3	0.3
2	0.2	0.2

a) ¿Determine si es de densidad?
b) Calcule las marginales de X y Y.
c) Calcule la esperanza y la varianza de X y Y.
d) Determine la correlación entre X y Y.
e) Calcule las funciones de densidad condicional.
f) Indique si X y Y son independientes.

Solución.
i.a) La primera propiedad para que la función sea de densidad, $f(x, y) \geq 0$, se cumple ya que todos los elementos probabilísticos del cuadro son positivos.

Por la segunda propiedad, $\sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x, y) = 1$, se obtiene que

$$0 + 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1.$$

Por lo tanto el cuadro de probabilidades sí representa una función de densidad conjunta.

i.b) La marginal de X es

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} f(x,y) \\ &= f(x,0)+f(x,1). \end{aligned}$$

Si $x=0$,

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f(0,0)+f(0,1) \\ &= 0+0.25 \\ &= 0.25. \end{aligned}$$

Si $x=1$,

$$\begin{aligned} f_X(1) &= f(1,0)+f(1,1) \\ &= 0.25+0.5 \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

O bien,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.25, & \text{si } x=0 \\ \\ 0.75, & \text{si } x=1. \end{cases}$$

De manera análoga para Y, se obtiene

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.25, & \text{si } y=0 \\ \\ 0.75, & \text{si } y=1. \end{cases}$$

Al cuadro de probabilidades se le pueden agregar las funciones de densidad marginal de la siguiente manera:

$y \backslash x$	0	1	$f_Y(y)$
0	0	0.25	0.25
1	0.25	0.5	0.75
$f_X(x)$	0.25	0.75	1

i.c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x f_X(x) \\ &= 0(0.25) + 1(0.75) \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

y la esperanza de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} y f_Y(y) \\ &= 0(0.25) + 1(0.75) \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

Se calcula[2]

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= \sum_{R_X} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= (0 - 0.75)^2(0.25) + (1 - 0.75)^2(0.75) \\ &= 0.1875. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left[(Y - E(Y))^2\right] \\ &= \sum_{R_Y} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} (y - E(X))^2 f_Y(y) \\ &= (0 - 0.75)^2(0.25) + (1 - 0.75)^2(0.75) \\ &= 0.1875. \end{aligned}$$

[2] $E(X^2) = \sum_{R_Y} x^2 f(x) + \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0(0.25) + 1(0.75) = 0.75.$
$V(X) = 0.75 - (0.75)^2 = 0.1875.$

i.d) Para calcular la correlación primero se tiene que calcular la covarianza, por ende,

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] \\ &= E(XY)-E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Primero se debe calcular

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0}^{1}\sum_{x=0}^{1} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0}^{1}(yf(0,y)+yf(1,y)) \\ &= f(0,0)+f(1,1) \\ &= 0.5, \end{aligned}$$

entonces,

$$Cov(X,Y) = 0.5-0.75(0.75) = -0.0625.$$

De manera que

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-0.0625}{\sqrt{0.1875}\sqrt{0.1875}} = -0.3334,$$

por lo tanto X, Y están correlacionadas.

i.e) Aplicando la definición de la condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Cuando $y=0$,

$$f(x|y=0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)}.$$

Si $x=0$,

$$f(x=0|y=0) = \frac{f(0,0)}{f_Y(0)} = \frac{0}{0.25} = 0.$$

Si $x=1$,

$$f(x=1|y=0) = \frac{f(1,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.25}{0.25} = 1.$$

O bien,

$$f(x|y=0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x=0 \\ \\ 1, & \text{si } x=1. \end{cases}$$

Procediendo de manera análoga, para $y = 1$,

$$f(x|y=1) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0 \\ \\ \frac{2}{3}, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Para la condicional,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Se obtiene,

cuando $x = 0$,

$$f(y|0) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = 0 \\ \\ 1, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

Si $x = 1$,

$$f(y|1) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } y = 0 \\ \\ \frac{2}{3}, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

i.f) Dado que

$$f(x=1|y=1) = \frac{2}{3} \neq f_X(1) = 0.75,$$

X y Y no son independientes.

ii.a) La primera propiedad para que la función sea de densidad, $f(x,y) \geq 0$, se cumple ya que todos los elementos probabilísticos del cuadro son positivos.

Por la segunda propiedad, $\sum\limits_{R_X}\sum\limits_{R_Y} f(x,y) = 1$, se obtiene que

$$0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.2 = 1.$$

Por lo tanto el cuadro de probabilidades sí representa una función de densidad conjunta.

ii.b) La marginal de X es

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= \sum_{y=0 \ y\neq 1}^{1} f(x,y) \\ &= f(x,0) + f(x,2). \end{aligned}$$

Si $x = 0$,

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f(0,0) + f(0,2) \\ &= 0.3 + 0.2 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

Si $x = 1$,

$$\begin{aligned} f_X(1) &= f(1,0) + f(1,2) \\ &= 0.3 + 0.2 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

O bien,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{si } x = 0 \\ \\ 0.5, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

De manera análoga para Y, se obtiene

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.6, & \text{si } y = 0 \\ \\ 0.4, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

Al cuadro de probabilidades se le pueden agregar las funciones de densidad marginal de la siguiente manera:

$x \backslash y$	0	1	$f_X(x)$
0	0.3	0.3	0.6
2	0.2	0.2	0.4
$f_Y(y)$	0.5	0.5	1

ii.c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x f_X(x) \\ &= 0(0.5) + 1(0.5) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

y la esperanza de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0 \ y\neq 1}^{2} y f_Y(y) \\ &= 0(0.6) + 2(0.4) \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

Se calcula

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= \sum_{R_X} (x - 0.5)^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= (0 - 0.5)^2(0.5) + (1 - 0.5)^2(0.5) \\ &= 0.25. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left[(Y - E(Y))^2\right] \\ &= \sum_{R_Y} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0 \ y\neq 1}^{2} (y - 0.8)^2 f_Y(y) \\ &= (0 - 0.8)^2(0.6) + (2 - 0.8)^2(0.4) \\ &= 0.96. \end{aligned}$$

ii.d)

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Primero se debe calcular

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0\ y\neq 1}^{2}\ \sum_{x=0}^{1} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0\ y\neq 1}^{2} (0 + yf(1,y)) \\ &= 0 + 2f(1,2) \\ &= 0.4, \end{aligned}$$

entonces,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.4 - 0.5(0.8) = 0.$$

De manera que

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.96}} = 0,$$

por lo tanto X, Y están correlacionadas.

ii.e) Aplicando la definición de la condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Cuando $y = 0$,

$$f(x|y=0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)}.$$

Si $x = 0$,

$$f(x=0|y=0) = \frac{f(0,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5.$$

Si $x = 1$,

$$f(x=1|y=0) = \frac{f(1,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5.$$

O bien,

$$f(x|y=0) = \begin{cases} 0.5, & \text{si } x = 0 \\ \\ 0.5, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Procediendo de manera análoga, para $y = 2$,

$$f(x|y=2) = \begin{cases} 0.5, & \text{si } x = 0 \\ \\ 0.5, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Para la condicional,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Se obtiene
Cuando $x = 0$,

$$f(y|0) = \begin{cases} 0.6, & \text{si } y = 0 \\ \\ 0.4, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

Si $x = 1$,

$$f(y|1) = \begin{cases} 0.6, & si \text{ y=0} \\ \\ 0.4, & si \text{ y=2.} \end{cases}$$

ii.f) Dado que

$$\begin{aligned} f(x=0|y=0) &= 0.5 = f_X(0), \\ f(x=1|y=0) &= 0.5 = f_X(0), \\ f(x=0|y=2) &= 0.5 = f_X(0), \\ f(x=1|y=2) &= 0.5 = f_X(1) \end{aligned}$$

y para

$$\begin{aligned} f(y=0|x=0) &= 0.6 = f_Y(0), \\ f(y=2|x=0) &= 0.4 = f_Y(2), \\ f(y=0|x=1) &= 0.6 = f_Y(0), \\ f(y=2|x=1) &= 0.4 = f_Y(2), \end{aligned}$$

por ende, X y Y son independientes.

Ejercicio 16. Considere la función conjunta

$$f(x,y) = p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}, \quad x \in \{0,1\}, \quad y \in \{0,1\} \ \text{ y } \ 0 \le p \le 1.$$

a) Determine si $f(x,y)$ es de densidad.
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) Calcule la esperanza y varianza de X y Y.
d) Determine la correlación entre X y Y.
e) Calcule las funciones de densidad condicional: $f(x|y)$ y $f(y|x)$.
f) Indique si X y Y son independientes.

Solución.
a) Evaluando la función conjunta en su recorrido se tiene que

$$f(0,0) = (1-p)^2, \quad f(0,1) = p(1-p), \quad f(1,0) = p(1-p), \quad f(1,1) = p^2.$$

Obviamente todos estos números son positivos, ya que el cuadrado de cualquier número es positivo y como $p \in (0,1)$, también lo está $1-p$, por lo tanto el producto de estos dos es positivo.

Dado que se cumple la primera propiedad, $f(x,y) \geq 0$, para que la función sea de densidad, a continuación se procede a verificar la segunda, $\sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x,y) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{R_Y}\sum_{R_X} f(x,y) &= \sum_{y=0}^{1}\sum_{x=0}^{1} f(x,y) \\
&= \sum_{y=0}^{1} [f(0,y) + f(1,y)] \\
&= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) \\
&= (1-p)^2 + p(1-p) + p(1-p) + p^2 \\
&= (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 \\
&= 1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 + p^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos propiedades, $f(x,y)$ es de densidad.

b) La función de densidad marginal de X es

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\
&= \sum_{y=0}^{1} p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)} \\
&= p^x(1-p)^{2-x} + p^{x+1}(1-p)^{1-x} \\
&= p^x(1-p)^{1-x}\,[(1-p)+p] \\
&= p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

y la esperanza de Y es

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{1} p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)} \\
&= p^y(1-p)^{2-y} + p^{1+y}(1-p)^{1-y} \\
&= p^y(1-p)^{1-y}\,[(1-p)+p] \\
&= p^y(1-p)^{1-y}, \quad y \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

O bien,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, & \text{si } x = 0 \\ \\ p, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1-p, & \text{si } y = 0 \\ \\ p, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

c) La esperanza y la varianza de X y Y son

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x\ p^x (1-p)^{1-x} \\ &= 0 + p^1(1-p)^{1-1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Y la esperanza de Y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0}^{1} y\ p^y (1-p)^{1-y} \\ &= 0 + p^1(1-p)^{1-1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Dado que

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X),$$

primero se debe de obtener

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{R_X} x^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x^2\ p^x (1-p)^{1-x} \\ &= 0 + p^1(1-p)^{1-1} \\ &= p, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E^2(X)\\ &= p - p^2\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$

Para calcular $V(Y)$ también se requiere encontrar primero

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_{R_Y} y^2 f_Y(y)\\ &= \sum_{y=0}^{1} y^2\ p^y(1-p)^{1-y}\\ &= 0 + p^1(1-p)^{1-1}\\ &= p,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y)\\ &= p - p^2\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$

d) Para calcular la correlación, primero se debe obtener la $Cov(X,Y)$, cuya definición es

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Lo primero que se debe hacer es calcular $E(XY)$.

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y)\\ &= \sum_{y=0}^{1}\sum_{x=0}^{1} xy\ p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}\\ &= \sum_{y=0}^{1}\sum_{x=0}^{1} xy\ p^y(1-p)^{1-y}\ p^x(1-p)^{1-x}\\ &= \sum_{y=0}^{1} y\ p^y(1-p)^{1-y}\sum_{x=0}^{1} x\ p^x(1-p)^{1-x}\\ &= E(Y)E(X)\end{aligned}$$

Observe que $E(XY) = E(X)E(Y)$ puesto que las v. a. son independientes, por lo que

$$Cov(X,Y) = p(p) - p(p) = 0.$$

De acuerdo a este último resultado, la correlación entre X y Y es igual a cero.

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = 0.$$

e) A continuación para determinar las funciones de densidad condicional, se usa la forma algebraica de la función de densidad conjunta.

Se calcula

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}}{p^y(1-p)^{1-y}} \\ &= \frac{p^y p^x (1-p)^{1-y}(1-p)^{1-x}}{p^y(1-p)^{1-y}} \\ &= p^x(1-p)^{1-x} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}}{p^x(1-p)^{1-x}} \\ &= \frac{p^y p^x (1-p)^{1-y}(1-p)^{1-x}}{p^x(1-p)^{1-x}} \\ &= p^y(1-p)^{1-y} \\ &= f_Y(y). \end{aligned}$$

f) Dado que

$$f(x|y) = p^x(1-p)^{1-x} = f_X(x),$$

X y Y son independientes.

Ejercicio 17. Considere la siguiente función conjunta.

$$f(x, y) = \frac{x+y}{21}, \quad x = 1, 2, 3, \quad y = 1, 2.$$

a) Determine si $f(x, y)$ es de densidad.
b) Calcule las funciones de densidad marginal.
c) Calcule la esperanza y varianza de X y Y.
d) Determine la correlación entre X y Y.
e) Calcule las funciones de densidad condicional: $f(x|y)$ y $f(y|x)$.

Solución.
a) Evaluando la función conjunta en su recorrido se tiene que

$$f(1,1)=\frac{2}{21},\quad f(1,2)=\frac{3}{21},\quad f(2,1)=\frac{3}{21},\quad f(2,2)=\frac{4}{21},\quad f(3,1)=\frac{4}{21},\quad f(3,2)=\frac{5}{21}.$$

Como todos los resultados son positivos, se cumple la primera propiedad, $f(x,y)\geq 0$.

Ahora se procede a verificar la segunda propiedad.

$$\begin{aligned}
\sum_{R_Y}\sum_{R_X} f(x,y) &= \sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{3} f(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{2}[f(1,y)+f(2,y)+f(3,y)] \\
&= f(1,1)+f(2,1)+f(3,1)+f(1,2)+f(2,2)+f(3,2) \\
&= \frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos propiedades $f(x,y)$ es de densidad.

b) La función de densidad marginal de X es

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{2}\frac{x+y}{21} \\
&= \frac{x+1}{21}+\frac{x+2}{21} \\
&= \frac{2x+3}{21},
\end{aligned}$$

sustituyendo cada valor de X se obtiene,

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{21}, & \text{si } x=1\\[2ex] \frac{7}{21}, & \text{si } x=2\\[2ex] \frac{9}{21}, & \text{si } x=3.\end{cases}$$

La marginal de Y es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x,y) \\ &= \sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} \\ &= \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+y}{21} \\ &= \frac{6+3y}{21}, \end{aligned}$$

por lo tanto, reemplazando cada valor de Y se tiene

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{9}{21}, & \text{si } y = 1 \\ \\ \frac{12}{21}, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=1}^{3} x \, \frac{2x+3}{21} \\ &= 1\left(\frac{2(1)+3}{21}\right) + 2\left(\frac{2(2)+3}{21}\right) + 3\left(\frac{2(3)+3}{21}\right) \\ &= 1\left(\frac{5}{21}\right) + 2\left(\frac{7}{21}\right) + 3\left(\frac{9}{21}\right) \\ &= \frac{46}{21}. \end{aligned}$$

Y la esperanza de Y

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\
&= \sum_{y=1}^{2} y \ \frac{6+3y}{21} \\
&= 1\left(\frac{6+3(1)}{21}\right) + 2\left(\frac{6+3(2)}{21}\right) \\
&= 1\left(\frac{9}{21}\right) + 2\left(\frac{12}{21}\right) \\
&= \frac{33}{21}.
\end{aligned}$$

Dado que

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X),$$

primero se debe de obtener

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{R_X} x^2 f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{3} x^2 \ \frac{2x+3}{21} \\
&= 1^2\left(\frac{2(1)+3}{21}\right) + 2^2\left(\frac{2(2)+3}{21}\right) + 3^2\left(\frac{2(3)+3}{21}\right) \\
&= 1\left(\frac{5}{21}\right) + 4\left(\frac{7}{21}\right) + 9\left(\frac{9}{21}\right) \\
&= \frac{114}{21},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{114}{21} - \left(\frac{46}{21}\right)^2 \\
&= 0.6304.
\end{aligned}$$

Para calcular $V(Y)$ también se requiere encontrar primero

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{R_Y} y^2 f_Y(y) \\
&= \sum_{y=1}^{2} y^2 \, \frac{6+3y}{21} \\
&= 1^2 \left(\frac{6+3(1)}{21}\right) + 2^2 \left(\frac{6+3(2)}{21}\right) \\
&= 1\left(\frac{9}{21}\right) + 4\left(\frac{12}{21}\right) \\
&= \frac{57}{21},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{57}{21} - \left(\frac{33}{21}\right)^2 \\
&= 0.2449.
\end{aligned}$$

d) Para calcular la correlación, primero se debe obtener la $Cov(X,Y)$, se determina utilizando la siguiente igualdad

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Lo primero que se debe hacer es calcular $E(XY)$.

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{3} xy\frac{x+y}{21} \\
&= \sum_{y=1}^{2} y\left[\frac{1+y}{21} + 2\,\frac{2+y}{21} + 3\,\frac{3+y}{21}\right] \\
&= \sum_{y=1}^{2} y\frac{14+6y}{21} \\
&= \frac{20}{21} + \frac{52}{21} \\
&= \frac{72}{21},
\end{aligned}$$

por lo que,

$$Cov(X,Y) \;=\; \frac{72}{21} - \frac{46}{21}\left(\frac{33}{21}\right) = -0.0136.$$

De acuerdo a este último resultado, la correlación entre X y Y es

$$Corr(X,Y) \;=\; \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-0.0136}{\sqrt{0.6304}\sqrt{0.2449}} = -0.0346.$$

e) Las funciones de densidad condicional son:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{6+3y}{21}} = \frac{x+y}{6+3y}$$

y

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{2x+3}{21}} = \frac{x+y}{2x+3}.$$

f) Dado que

$$f(x|y) = \frac{x+y}{6+3y} \neq f_X(x) = \frac{2x+3}{21},$$

X y Y no son independientes.

Ejercicio 18. Considere

$$f(x,y) = k(x+y-2xy^2), \qquad 0<x<1, \quad 0<y<1.$$

a) Calcule la correlación entre X y Y.
b) Calcule las funciones de densidad condicional: $f(x|y)$ y $f(y|x)$.
c) Indique si X y Y son independientes.

Solución.
a) Se calcula la covarianza por medio de la siguiente igualdad.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Primero es necesario obtener

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{R_Y}\int_{R_X} xyf(x,y)dxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 xy(x+y-2xy^2)dxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 (x^2y+xy^2-2x^2y^3)dxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}x^3y^3\right)\Bigg|_0^1 dy \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3\right) dy \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{6}y^4\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

dado que, la $E(X)$ y $E(Y)$ fueron calculadas en el ejemplo 5, se tiene

$$Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{1}{4}-\frac{13}{24}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{13}{48} = -\frac{1}{48} = -0.0208,$$

entonces

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-0.0208}{\sqrt{0.0815}\sqrt{0.075}} = \frac{-0.0208}{(0.2854)(0.2738)} = -0.2663,$$

por lo que X y Y están correlacionadas de manera inversa.

b) Aplicando la definición de la condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{2}(x+y-2xy^2)}{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2} = \frac{x+y-2xy^2}{\frac{1}{2}+y-y^2}.$$

Para la condicional

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{2}(x+y-2xy^2)}{\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}} = \frac{3(x+y-2xy^2)}{x+\frac{3}{2}}.$$

c) Dado que

$$f(y|x) = \frac{3(x+y-2xy^2)}{x+\frac{3}{2}} \neq f_Y(y) = \frac{3}{4}+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2,$$

X y Y no son independientes.

Ejercicio 19. Considere los siguientes cuadros de probabilidades

i.

$y\backslash x$	0	1	2
0	0.2	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.2

ii.

$y\backslash x$	2.3	2.5	2.7
3.8	0.05	0.1	0.05
4.0	0.1	0.4	0.1
4.2	0.05	0.1	0.05

iii.

$x\backslash y$	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.3

a) Determine si el cuadro de probabilidades representa una función de densidad conjunta.
b) Calcule las marginales de X y Y.
c) Calcule la esperanza y la varianza de X y Y.
d) Determine la correlación entre X y Y.
e) Calcule las funciones de densidad condicional: $f(x|y)$ y $f(y|x)$.
f) Indique si X y Y son independientes.

Solución.
i.a) La primera propiedad para que la función sea de densidad, $f(x,y) \geq 0$, se cumple ya que todos los elementos probabilísticos del cuadro son positivos.

Por la segunda propiedad, $\sum_{R_X}\sum_{R_Y} f(x,y) = 1$, se obtiene que

$$0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.2 = 1.$$

Por lo tanto el cuadro de probabilidades sí representa una función de densidad conjunta.

i.b) La marginal de X es

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= \sum_{y=0,\ y\neq 1}^{2} f(x,y) \\ &= f(x,0) + f(x,2). \end{aligned}$$

Si $x = 0$

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f(0,0) + f(0,2) \\ &= 0.2 + 0.1 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Si $x = 1$

$$\begin{aligned} f_X(1) &= f(1,0) + f(1,2) \\ &= 0.2 + 0.1 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Si $x = 2$

$$\begin{aligned} f_X(2) &= f(2,0) + f(2,2) \\ &= 0.2 + 0.2 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

O bien,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.3, & \text{si } x = 0 \\ 0.3, & \text{si } x = 1 \\ 0.4, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

De manera análoga para Y, se obtiene

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.6, & \text{si } y = 0 \\ 0.4, & \text{si } y = 2. \end{cases}$$

Al cuadro de probabilidades se le pueden agregar las funciones de densidad marginal de la siguiente manera:

$y\backslash x$	0	1	2	$f_Y(y)$
0	0.2	0.2	0.2	0.6
2	0.1	0.1	0.2	0.4
$f_X(x)$	0.3	0.3	0.4	1

i.c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) \\ &= 0(0.3) + 1(0.3) + 2(0.4) \\ &= 1.1, \end{aligned}$$

y la esperanza de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0,\ y\neq 1}^{2} y f_Y(y) \\ &= 0(0.6) + 2(0.4) \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= \sum_{R_X} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{2} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= (0 - 1.1)^2(0.3) + (1 - 1.1)^2(0.3) + (2 - 1.1)(0.4) \\ &= 0.69, \end{aligned}$$

enseguida,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left[(Y - E(Y))^2\right] \\ &= \sum_{R_Y} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=0,\ y\neq 1}^{2} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= (0 - 0.8)^2(0.6) + (2 - 0.8)^2(0.4) \\ &= 0.96. \end{aligned}$$

i.d)

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Primero se debe calcular

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0,\ y\neq 1}^{2}\ \sum_{x=0}^{2} xyf(x,y) \\ &= \sum_{y=0,\ y\neq 1}^{2} (0 + yf(1,y) + 2yf(2,y)) \\ &= 0 + 2f(1,2) + 4f(2,2) \\ &= 2(0.1) + 4(0.2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

entonces,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 1.1(0.8) = 0.12.$$

Enseguida se obtiene $Corr(X,Y)$,

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0.12}{\sqrt{0.69}\sqrt{0.96}} = 0.1474,$$

por lo tanto $X,\ Y$ no están altamente relacionadas.

i.e) Aplicando la definición de la condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Cuando $y = 0$,

$$f(x|y=0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)}.$$

Si $x = 0$,

$$f(x=0|y=0) = \frac{f(0,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

Si $x = 1$,

$$f(x=1|y=0) = \frac{f(1,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

Si $x = 2$,

$$f(x=1|y=0) = \frac{f(2,0)}{f_Y(0)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

O bien,

$$f(x|y=0)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \text{si } x=0\\ \\ \frac{1}{3}, & \text{si } x=1\\ \\ \frac{1}{3}, & \text{si } x=2.\end{cases}$$

Procediendo de manera análoga, para $y=2$,

$$f(x|y=2)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{si } x=0\\ \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x=1\\ \\ \frac{2}{4}, & \text{si } x=2.\end{cases}$$

Para la condicional,

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Cuando $x=0$.
Si $y=0$,

$$f(y=0|x=0)=\frac{f(0,0)}{f_X(0)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}.$$

Si $y=2$,

$$f(y=2|x=0)=\frac{f(2,0)}{f_X(0)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}.$$

O bien,

$$f(y|0)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & \text{si } y=0\\ \\ \frac{1}{3}, & \text{si } y=2.\end{cases}$$

Procediendo de manera análoga para $x=1$ y $x=2$, se obtuvo

$$f(y|1)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & \text{si } y=0\\ \\ \frac{1}{3}, & \text{si } y=2.\end{cases}$$

$$f(y|2)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{si } y=0\\ \\ \frac{1}{2}, & \text{si } y=2.\end{cases}$$

i.f) Dado que
$$f(x=1|y=2)=\frac{1}{4}\neq f_X(1)=0.3,$$
X y Y no son independientes.

ii.a) La primera propiedad para que $f(x,y)$ sea de densidad se cumple ya que todos los elementos probabilísticos del cuadro son positivos.

Por la segunda propiedad se obtiene que la suma de todos los elementos probabilísticos del cuadro son uno
$$0.05+0.1+0.05+0.1+0.4+0.1+0.05+0.1+0.05=1,$$
por lo tanto, el cuadro de probabilidades sí representa una función de densidad conjunta.

ii.b) La marginal de X es
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{R_Y} f(x,y) \\ &= f(x,3.8)+f(x,4)+f(x,4.2). \end{aligned}$$
De manera que,
$$\begin{aligned} f_X(2.3) &= f(2.3,3.8)+f(2.3,4)+f(2.3,4.2) \\ &= 0.05+0.1+0.05 \\ &= 0.2. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_X(2.5) &= f(2.5,3.8)+f(2.5,4)+f(2.5,4.2) \\ &= 0.1+0.4+0.1 \\ &= 0.6. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_X(2.7) &= f(2.7,3.8)+f(2.7,4)+f(2.7,4.2) \\ &= 0.05+0.1+0.05 \\ &= 0.2. \end{aligned}$$
O bien,
$$f_X(x)=\begin{cases} 0.2, & \text{si } x=2.3 \\ 0.6, & \text{si } x=2.5 \\ 0.2, & \text{si } x=2.7. \end{cases}$$
De manera análoga para Y, se obtiene
$$f_Y(y)=\begin{cases} 0.2, & \text{si } y=3.8 \\ 0.6, & \text{si } y=4 \\ 0.2, & \text{si } y=4.2. \end{cases}$$

Al cuadro de probabilidades se le pueden agregar las funciones de densidad marginal de la siguiente manera:

$y\backslash x$	2.3	2.5	2.7	$f_Y(y)$
3.8	0.05	0.1	0.05	0.2
4.0	0.1	0.4	0.1	0.6
4.2	0.05	0.1	0.05	0.2
$f_X(x)$	0.2	0.6	0.2	1

ii.c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= 2.3(0.2) + 2.5(0.6) + 2.7(0.2) \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

y la esperanza de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= 3.8(0.2) + 4(0.6) + 4.2(0.2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

La varianza se calcula usando la siguiente igualdad

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Primero se debe obtener

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{R_X} x^2 f_X(x) \\ &= (2.3)^2 0.2 + (2.5)^2 0.6 + (2.7)^2 0.2 \\ &= 6.266, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 6.266 - (2.5)^2 \\ &= 0.016. \end{aligned}$$

Ahora la varianza de Y

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{R_Y} y^2 f_Y(y) \\ &= (3.8)^2 0.2 + (4)^2 0.6 + (4.2)^2 0.2 \\ &= 16.016, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= 16.016 - (4)^2 \\ &= 0.016. \end{aligned}$$

ii.d) Primero se debe calcular

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

De manera que

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{R_Y} \sum_{R_X} xyf(x,y) \\ &= \sum_{R_Y} [2.3yf(x,y) + 2.5yf(x,y) + 2.7yf(x,y)] \\ &= \sum_{R_Y} y\,[2.3f(2.3,y) + 2.5f(2.5,y) + 2.7f(2.7,y))] \\ &= 3.8\,[2.3f(2.3,3.8) + 2.5f(2.5,3.8) + 2.7f(2.7,3.8)] \\ &\quad +4\,[2.3f(2.3,4) + 2.5f(2.5,4) + 2.7f(2.7,4)] \\ &\quad +4.2\,[2.3f(2.3,4.2) + 2.5f(2.5,4.2) + 2.7f(2.7,4.2)] \\ &= 3.8\,[2.3(0.05) + 2.5(0.1) + 2.7(0.05)] \\ &\quad +4\,[2.3(0.1) + 2.5(0.4) + 2.7(0.1)] \\ &\quad +4.2\,[2.3(0.05) + 2.5(0.1) + 2.7(0.05)] \\ &= 3.8(0.115 + 0.25 + 0.135) + 4(0.23 + 1 + 0.27) \\ &\quad +4.2(0.115 + 0.25 + 0.135) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$Cov(X,Y) = 10 - 2.5(4) = 0.$$

De acuerdo a este último resultado, la correlación entre X y Y es igual a cero.

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = 0.$$

ii.e) Aplicando la definición de la condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Cuando $y = 3.8$,
$$f(x|3.8) = \frac{f(x, 3.8)}{f_Y(3.8)}.$$
Si $x = 2.3$,
$$f(2.3|3.8) = \frac{f(2.3, 3.8)}{f_Y(3.8)} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25.$$
Si $x = 2.5$,
$$f(2.5|3.8) = \frac{f(2.5, 3.8)}{f_Y(3.8)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5.$$
Si $x = 2.7$,
$$f(2.7|3.8) = \frac{f(2.7, 3.8)}{f_Y(3.8)} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25.$$
O bien,
$$f(x|3.8) = \begin{cases} 0.25, & \text{si} \ \ x = 2.3 \\ 0.5, & \text{si} \ \ x = 2.5 \\ 0.25, & \text{si} \ \ x = 2.7. \end{cases}$$
Procediendo de manera análoga, para $y = 4$,
$$f(x|4) = \begin{cases} 0.166, & \text{si} \ \ x = 2.3 \\ 0.66, & \text{si} \ \ x = 2.5 \\ 0.166, & \text{si} \ \ x = 2.7 \end{cases}$$
y para $y = 4.2$,
$$f(x|4.2) = \begin{cases} 0.25, & \text{si} \ \ x = 2.3 \\ 0.5, & \text{si} \ \ x = 2.5 \\ 0.25, & \text{si} \ \ x = 2.7. \end{cases}$$
Para la condicional,
$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$
Se obtiene respectivamente
$$f(y|2.3) = \begin{cases} 0.25, & \text{si} \ \ y = 3.8 \\ 0.5, & \text{si} \ \ y = 4 \\ 0.25, & \text{si} \ \ y = 4.2. \end{cases}$$

$$f(y|2.5) = \begin{cases} 0.166, & \text{si} \;\; y = 3.8 \\ 0.66, & \text{si} \;\; y = 4 \\ 0.166, & \text{si} \;\; y = 4.2. \end{cases}$$

$$f(y|2.7) = \begin{cases} 0.25, & \text{si} \;\; y = 3.8 \\ 0.5, & \text{si} \;\; y = 4 \\ 0.25, & \text{si} \;\; y = 4.2. \end{cases}$$

ii.f) Dado que

$$f(x = 2.3|y = 4) = 0.166 \neq f_X(2.3) = 0.2,$$

X y Y no son independientes.

iii.a) La primera propiedad para que la función sea de densidad, $f(x, y) \geq 0$, se cumple ya que todos los elementos probabilísticos del cuadro son positivos.

Por la segunda propiedad, $\sum_{R_X} \sum_{R_Y} f(x, y) = 1$, se obtiene que

$$0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.3 = 1.$$

Por lo tanto el cuadro de probabilidades sí representa una función de densidad conjunta.

iii.b) La marginal de Y es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{R_X} f(x, y) \\ &= \sum_{x=-1,\; x\neq 0}^{1} f(x, y) \\ &= f(-1, y) + f(1, y). \end{aligned}$$

Si $y = -1$

$$\begin{aligned} f_Y(-1) &= f(-1, -1) + f(1, -1) \\ &= 0.1 + 0.2 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Si $y = 0$

$$\begin{aligned} f_Y(0) &= f(-1, 0) + f(1, 0) \\ &= 0.2 + 0.1 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

Si $y = 1$

$$\begin{aligned} f_Y(1) &= f(-1,1) + f(1,1) \\ &= 0.1 + 0.3 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

O bien,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.3, & \text{si } y = -1 \\ 0.3, & \text{si } y = 0 \\ 0.4, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

De manera análoga para X, se obtiene

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.4, & \text{si } x = -1 \\ 0.6, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Al cuadro de probabilidades se le pueden agregar las funciones de densidad marginal de la siguiente manera:

$x \backslash y$	-1	0	1	$f_X(x)$
-1	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0.2	0.1	0.3	0.6
$f_Y(y)$	0.3	0.3	0.4	1

iii.c) La esperanza de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} x f_X(x) \\ &= \sum_{x=-1,\ x\neq 0}^{1} x f_X(x) \\ &= -1(0.4) + 1(0.6) \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

y la esperanza de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{R_Y} y f_Y(y) \\ &= \sum_{y=-1}^{1} y f_Y(y) \\ &= -1(0.3) + 0(0.3) + 1(0.4) \\ &= 0.1. \end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular la varianza de X.

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= \sum_{R_X} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= \sum_{x=-1,\ x\neq 0}^{1} (x - E(X))^2 f_X(x) \\ &= (-1 - 0.2)^2(0.4) + (1 - 0.2)^2(0.6) \\ &= 0.96 \end{aligned}$$

y la varianza de Y,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left[(Y - E(Y))^2\right] \\ &= \sum_{R_Y} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= \sum_{y=-1}^{1} (y - E(Y))^2 f_Y(y) \\ &= (-1 - 0.1)^2(0.3) + (0 - 0.1)^2(0.3) + (1 - 0.1)^2(0.4) \\ &= 0.69. \end{aligned}$$

iii.d) Primero se debe calcular la covarianza dada por la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{R_Y}\sum_{R_X} xyf(x,y) \\
&= \sum_{y=-1}^{1}\sum_{x=-1,\ x\neq 0}^{1} xyf(x,y) \\
&= \sum_{y=-1}^{1}(-yf(-1,y)+0+yf(1,y)) \\
&= f(-1,-1)-f(1,-1)-f(-1,1)+f(1,1) \\
&= 0.1-0.2-0.1+0.3 \\
&= 0.1,
\end{aligned}$$

entonces,

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.1-0.96(0.69)=-0.5624.$$

Enseguida se obtiene la correlación,

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{-0.5624}{\sqrt{0.69}\sqrt{0.96}}=-0.6911,$$

por lo tanto $X,\ Y$ están altamente relacionadas.

iii.e) Por la definición de la condicional

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Cuando $y=-1$,

$$f(x|y=-1)=\frac{f(x,-1)}{f_Y(-1)}.$$

Si $x=-1$,

$$f(x=-1|y=-1)=\frac{f(-1,-1)}{f_Y(-1)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}.$$

Si $x=1$,

$$f(x=1|y=0)=\frac{f(1,0)}{f_Y(0)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}.$$

O bien,

$$f(x|y=-1)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \text{si } \ x=-1\\ \\ \frac{2}{3}, & \text{si } \ x=1.\end{cases}$$

Procediendo de manera análoga, para $y = 0$,

$$f(x|y=0) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{si } \ x = -1 \\ \\ \frac{1}{3}, & \text{si } \ x = 1. \end{cases}$$

y $y = 1$,

$$f(x|y=1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } \ x = -1 \\ \\ \frac{3}{4}, & \text{si } \ x = 1. \end{cases}$$

Para la condicional,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Se obtiene

$$f(y|x=-1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } \ y = -1 \\ \\ \frac{2}{4}, & \text{si } \ y = 0 \\ \\ \frac{1}{4}, & \text{si } \ y = 1. \end{cases}$$

$$f(y|x=1) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } y = -1 \\ \\ \frac{1}{6}, & \text{si } y = 0 \\ \\ \frac{1}{2}, & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

iii.f) Dado que

$$f(x=-1|y=1) = 0.1 \neq f_X(-1) = 0.4,$$

X y Y no son independientes.

Ejercicio 20. Sea $f(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y), \ x \in (0,2), \ y \in (2,4)$, una función de densidad.

a) Determine la correlación entre X e Y.
b) Indique si X e Y son independientes.

Solución.
a) Por defincición

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

Por ello, se procede primero a calcular la covarianza.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] \\ &= E(XY)-E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Por el ejemplo 3 se sabe que $f_X(x)=\frac{1}{4}(3-x)$ y $f_Y(y)=\frac{1}{4}(5-y)$, entonces

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R_X} x f_X(x)dx \\ &= \int_0^2 x\frac{1}{4}(3-x)dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(6-\frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{R_X} x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^2 x^2\frac{1}{4}(3-x)dx \\ &= \frac{1}{4}\left(x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{1}{4}(8-4) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-E^2(X) \\ &= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= 1-\frac{25}{36} \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{R_Y} y f_Y(y)dy \\
&= \int_2^4 y\frac{1}{4}(5-y)dy \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_2^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(30 - \frac{56}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{34}{3}\right) \\
&= \frac{17}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{R_Y} y^2 f_Y(y)dy \\
&= \int_2^4 y^2\frac{1}{4}(5-y)dy \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_2^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{280}{3} - 60\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{100}{3}\right) \\
&= \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
&= \frac{25}{3} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 \\
&= \frac{25}{3} - \frac{289}{36} \\
&= \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{R_Y}\int_{R_X} xyf(x,y)dxdy \\
&= \int_2^4\int_0^2 xy\frac{1}{8}(6-x-y)dxdy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{6}{16}x^2y - \frac{1}{24}x^3y - \frac{1}{16}x^2y^2\right)\Big|_0^2 dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{24}{16}y - \frac{8}{24}y - \frac{4}{16}y^2\right) dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{7}{6}y - \frac{4}{16}y^2\right) dy \\
&= \left(\frac{7}{12}y^2 - \frac{4}{48}y^3\right)\Big|_2^4 \\
&= \frac{7}{12}(12) - \frac{4}{48}(56) \\
&= 7 - \frac{224}{48} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Con lo que

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{3} - \frac{5}{6}\left(\frac{17}{6}\right) = -\frac{1}{36}$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\sqrt{\frac{11}{36}}} = -0.2967$$

b) Independencia

$$\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) &= \frac{1}{4}(3-x)\left[\frac{1}{4}(5-y)\right] \\
&= \frac{1}{8}(3-x)(5-y) \\
&= \frac{1}{8}(15-5x-3y+xy) \neq \frac{1}{8}(6-x-y).
\end{aligned}$$

por tanto X, Y no son independientes.